



Leçon 7.1 Amortisseur de Frahm - Tuned Mass Damper -

ME-332 – Mécanique Vibratoire

Prof. Guillermo Villanueva

- Amortisseur de Frahm
- Amplitude de la masse principale
- Cas conservatif
- Cas hyper-rigide
- Amplitude des 2 masses



Chapitre 9

Amortisseur de Frahm

EPFL Amortisseur de Frahm

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \\ V &= \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_3 (x_1 - x_2)^2 \end{aligned}$$

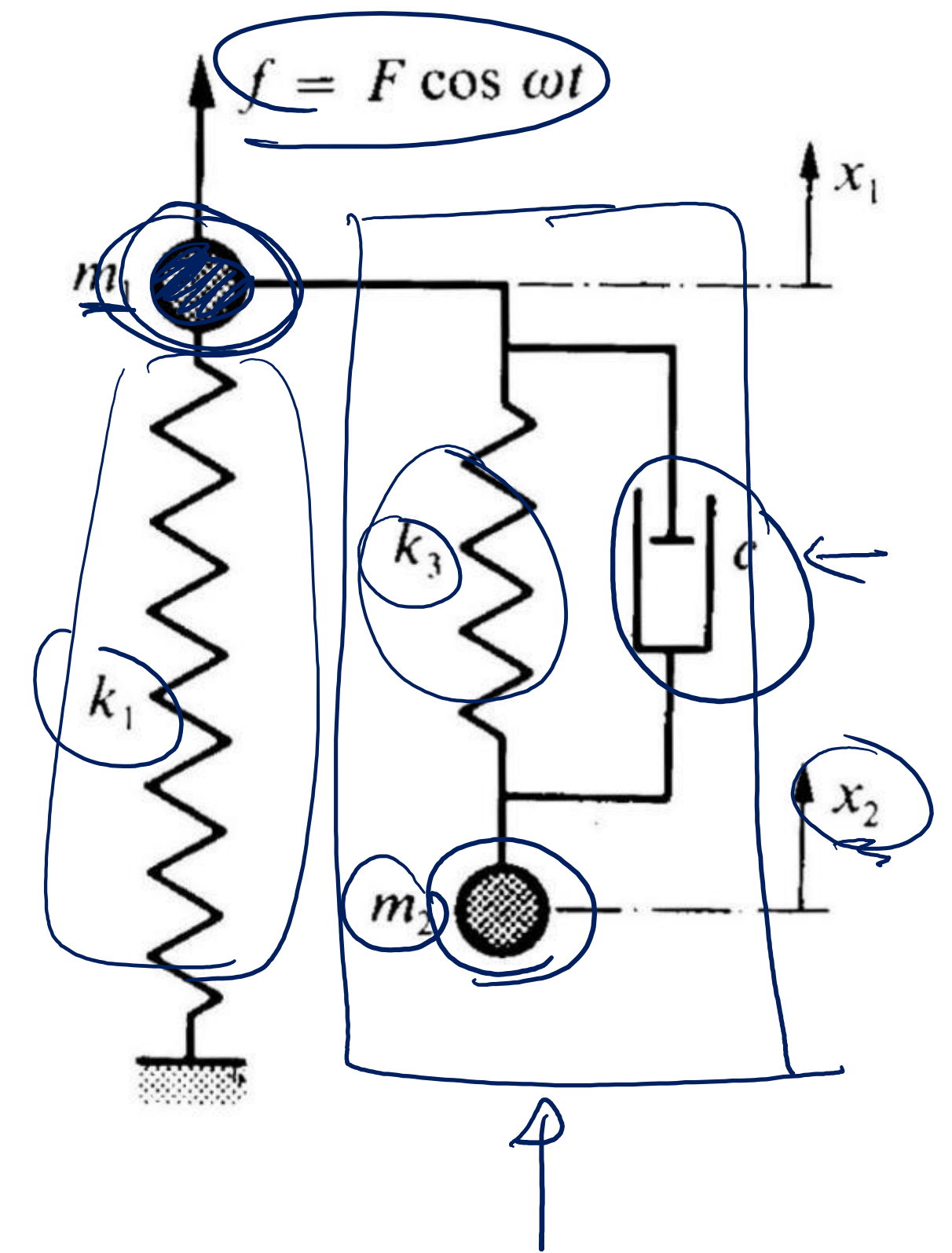
Coordonnées généralisées d'un système à deux degrés de liberté

$x_1(t)$ et $x_2(t)$

Equations de Newton d'un amortisseur de Frahm (régime forcé d'un oscillateur à deux degrés de liberté)

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 + k_3 (x_1 - x_2) &= F \cos(\omega t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_3 (x_1 - x_2) &= 0 \quad (9.1) \end{aligned}$$

principale →



EPFL Solution permanent harmonique

$$m_1 \ddot{x}_1 + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 + k_3(x_1 - x_2) = F \cos(\omega t)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_3(x_2 - x_1) = 0 \quad (9.1)$$

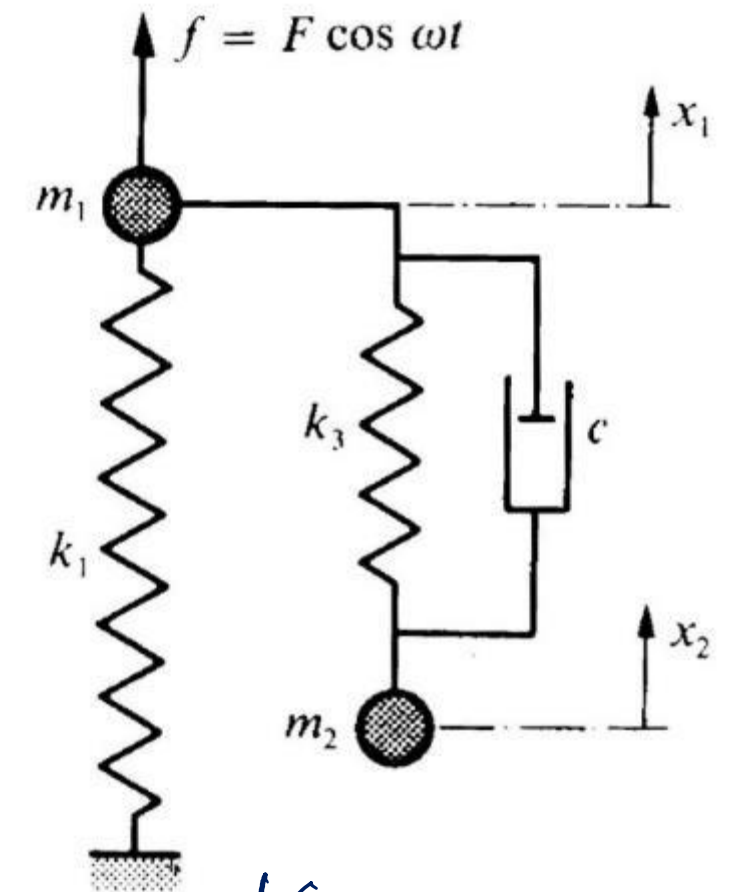
Solutions du régime permanent de l'amortisseur

$$\underline{x}_1 = X_1 \cos(\omega t - \varphi_1) = \text{Re}(\underline{x}_1)$$

$$\underline{x}_2 = X_2 \cos(\omega t - \varphi_2) = \text{Re}(\underline{x}_2)$$

avec

$$\begin{aligned} \underline{x}_1 &= X_1 e^{j(\omega t - \varphi_1)} \\ &= X_1 e^{-j\varphi_1} \cdot e^{j\omega t} = \underline{A}_1 e^{j\omega t} \\ \underline{x}_2 &= X_2 e^{j(\omega t - \varphi_2)} \\ &= X_2 e^{-j\varphi_2} \cdot e^{j\omega t} = \underline{A}_2 e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (9.2)$$



$$m_1(-\omega^2) \cdot \underline{A}_1 e^{j\omega t} + c j\omega (\underline{A}_1 - \underline{A}_2) e^{j\omega t} + k_1 \underline{A}_1 e^{j\omega t} + k_3 e^{j\omega t} (\underline{A}_1 - \underline{A}_2) = F e^{j\omega t}$$

$$-\omega^2 m_2 \underline{A}_2 + c j\omega (\underline{A}_2 - \underline{A}_1) + k_3 (\underline{A}_2 - \underline{A}_1) = 0$$

EPFL Solution permanent harmonique

Intégration des solutions dans les formes complexes des équations de Newton

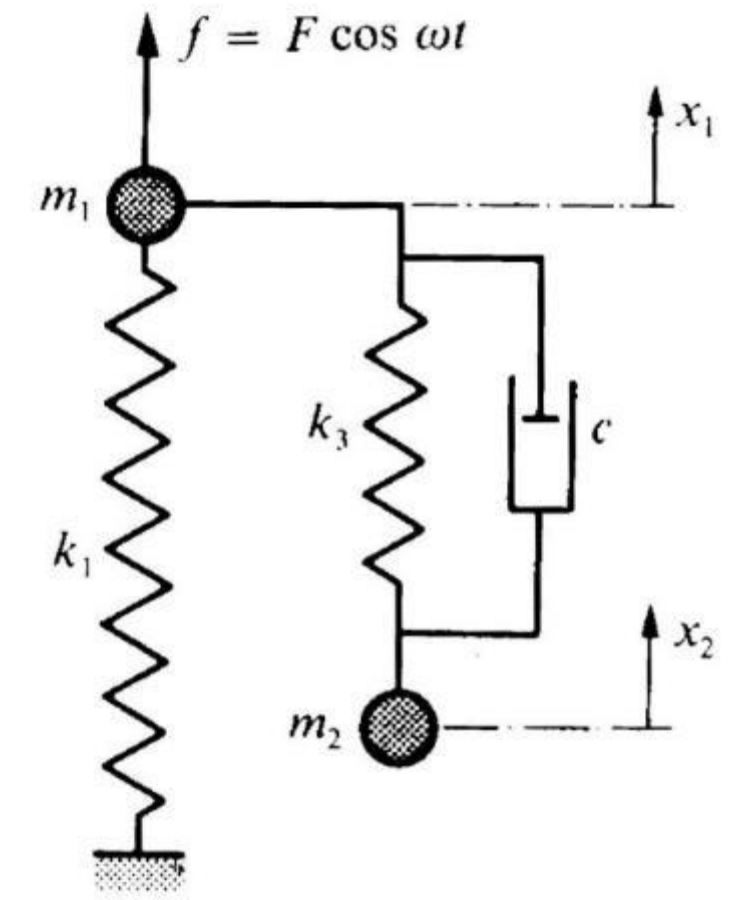
$$\begin{aligned} -\omega^2 m_1 \underline{A}_1 + k_1 \underline{A}_1 + k_3 (\underline{A}_1 - \underline{A}_2) \\ + j\omega c (\underline{A}_1 - \underline{A}_2) = \underline{F} \\ -\omega^2 m_2 \underline{A}_2 + k_3 (\underline{A}_2 - \underline{A}_1) \\ + j\omega c (\underline{A}_2 - \underline{A}_1) = 0 \end{aligned}$$

Isolation des grandeurs complexes $\underline{A}_1$ et $\underline{A}_2$

$$\begin{aligned} \underline{A}_1 (-\omega^2 m_1 + k_1 + k_3 + j\omega c) \\ - \underline{A}_2 (k_3 + j\omega c) = F \\ - \underline{A}_1 (k_3 + j\omega c) \\ + \underline{A}_2 (-\omega^2 m_2 + k_3 + j\omega c) = 0 \end{aligned} \quad (9.3)$$

avec

$$\underline{F} = |F e^{j\omega t}| = \underline{f}$$



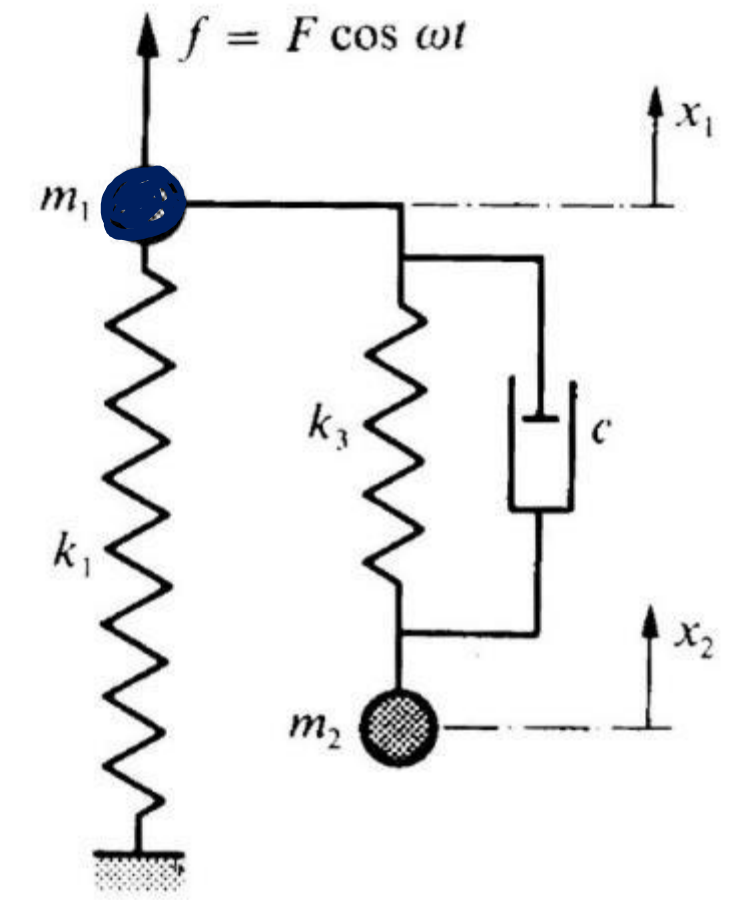
EPFL Amplitude de la masse principale

Extraction de la *grandeur complexe* $\underline{A}_1$ relative à l'amplitude du mouvement de la masse principale

$$\underline{A}_1 = F \frac{(k_3 - \omega^2 m_2) + j\omega c}{(k_1 - \omega^2 m_1)(k_3 - \omega^2 m_2) - \omega^2 m_2 k_3 + j\omega c(k_1 - \omega^2(m_1 + m_2))}$$

Module de la grandeur complexe $\underline{A}_1$: *amplitude* X_1 du mouvement de la masse principale

$$X_1^2 = \frac{F^2((k_3 - \omega^2 m_2)^2 + (\omega c)^2)}{((k_1 - \omega^2 m_1)(k_3 - \omega^2 m_2) - \omega^2 m_2 k_3)^2 + (\omega c(k_1 - \omega^2(m_1 + m_2)))^2} \quad (9.5)$$



EPFL Amortisseur de Frahm – Amplitude de la masse principale

Notations complémentaires

$$\varepsilon = \frac{m_2}{m_1}$$

rapport entre la masse de l'amortisseur et la masse principale

pratique
 $\varepsilon \ll 1$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$$

pulsation propre de l'oscillateur principal isolé

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_3}{m_2}}$$

pulsation propre de l'oscillateur secondaire non amorti isolé

$$\alpha = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

rapport entre les pulsations propres

$\alpha \sim 1$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_1}$$

rapport entre la pulsation forcée et la pulsation propre de l'oscillateur principal

$$\eta = \frac{c}{2m_2\omega_1}$$

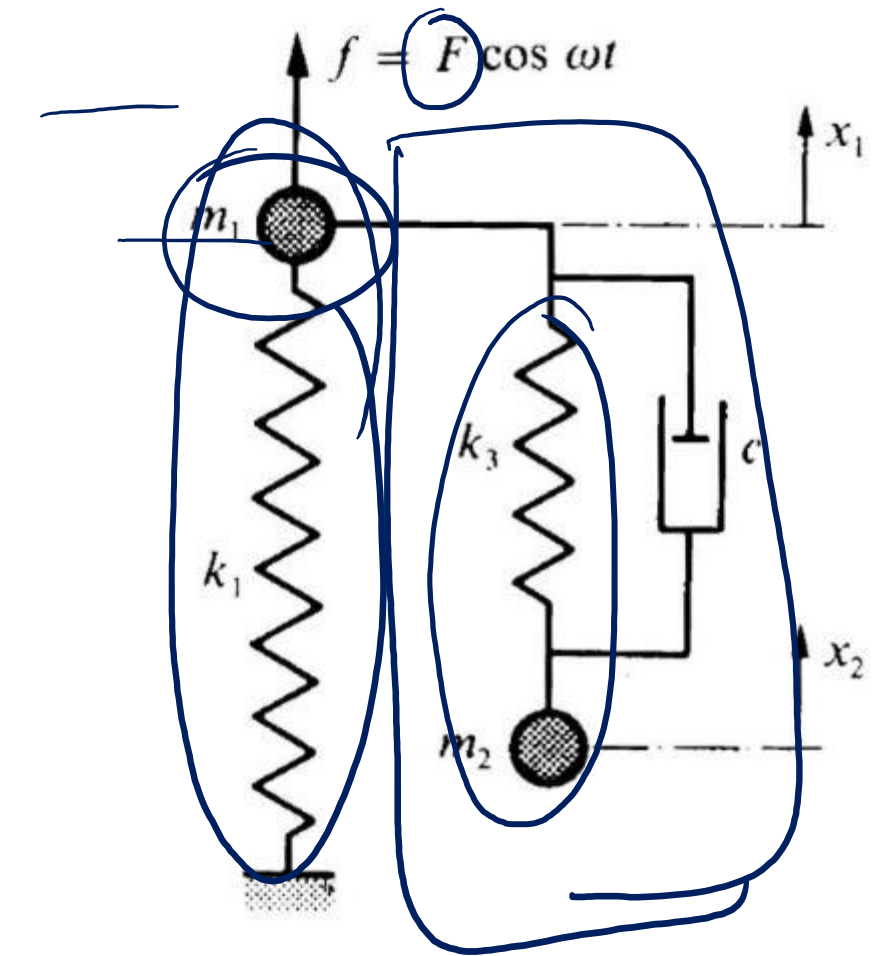
amortissement relatif croisé

$$X_{1s} = \frac{F}{k_1}$$

déplacement statique de la masse principale

$$\mu_1 = \frac{X_1}{X_{1s}}$$

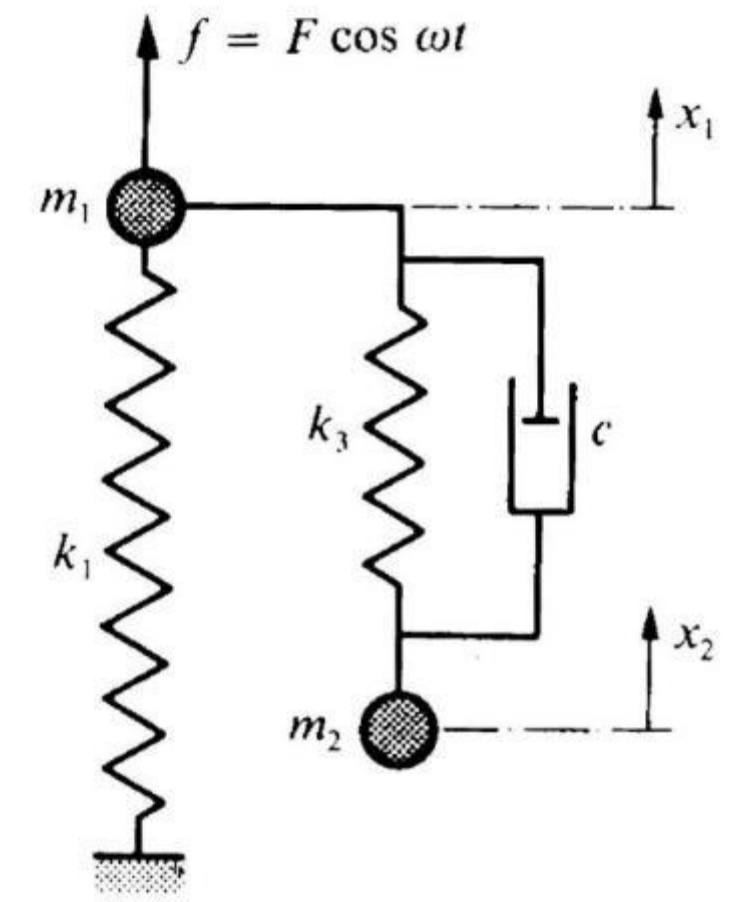
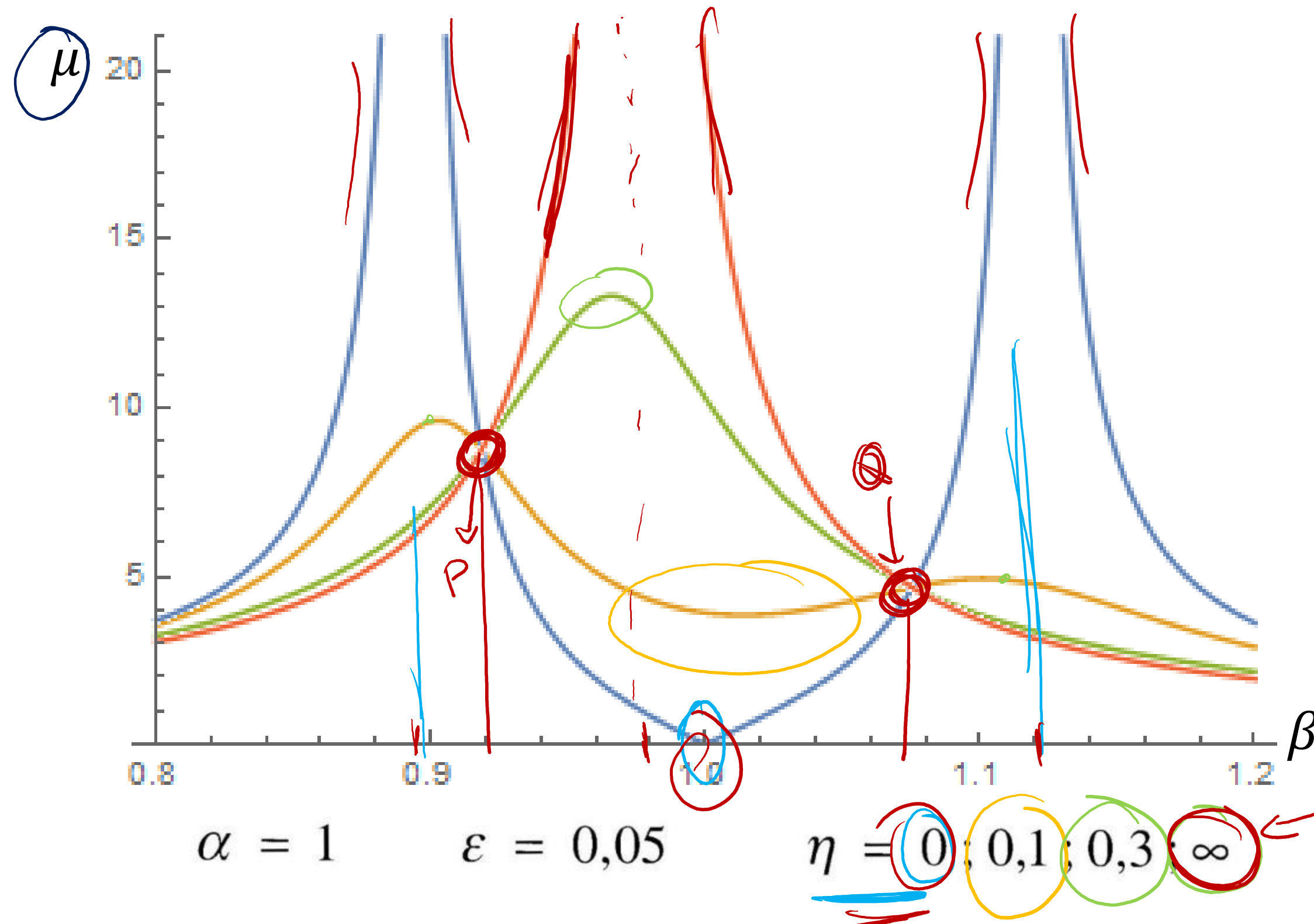
facteur d'amplification dynamique du mouvement de la masse principale



EPFL Amplitude de la masse principale

Amplitude relative μ du mouvement de la masse principale

$$\mu^2 = \frac{X_1^2}{X_{1s}^2} = \frac{4\eta^2\beta^2 + (\beta^2 - \alpha^2)^2}{4\eta^2\beta^2(\beta^2(1 + \varepsilon) - 1)^2 + (\varepsilon\alpha^2\beta^2 - (\beta^2 - 1)(\beta^2 - \alpha^2))^2}$$



$\eta = 0 \rightarrow$ poles = fréq. propres du système

EPFL Cas limite 1 – Conservatif

$$c = 0$$

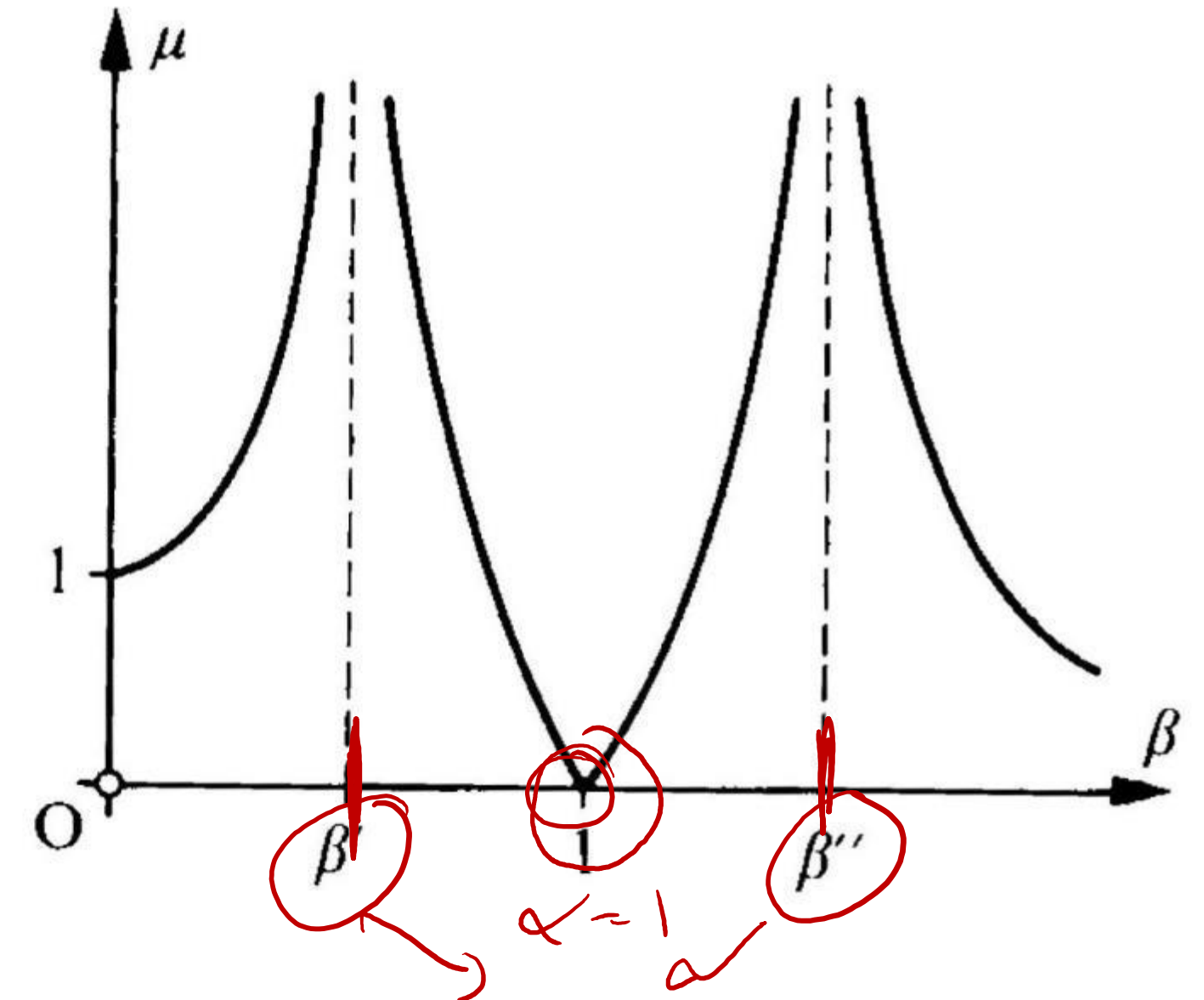
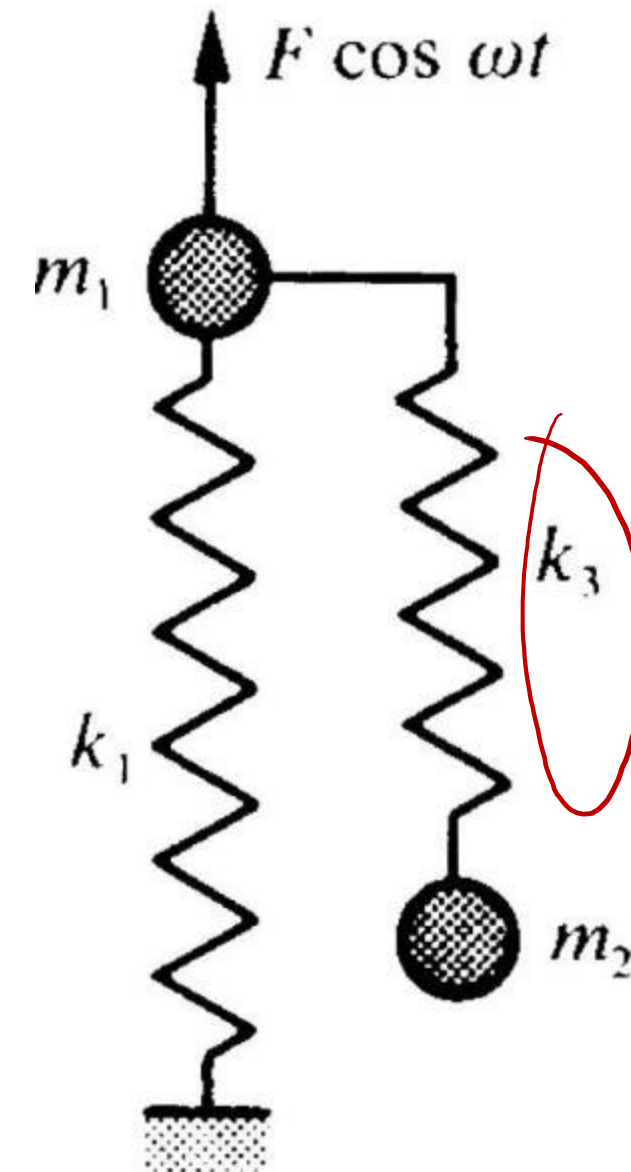
$$\mu = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\varepsilon \alpha^2 \beta^2 - (\beta^2 - 1)(\beta^2 - \alpha^2)}$$

Cas limite de l'oscillateur secondaire *non amorti*
 ($\eta = 0$, $\alpha = 1$, $\varepsilon = 0,05$)

$$\mu = \left| \frac{\beta^2 - 1}{0,05 \beta^2 - (\beta^2 - 1)^2} \right| \quad (9.7)$$

$$\mu \rightarrow \infty \quad \text{si } \beta = \beta' \text{ et } \beta = \beta''$$

$$\mu = 0 \quad \text{si } \beta = 1$$



EPFL Cas limite 1 – Conservatif

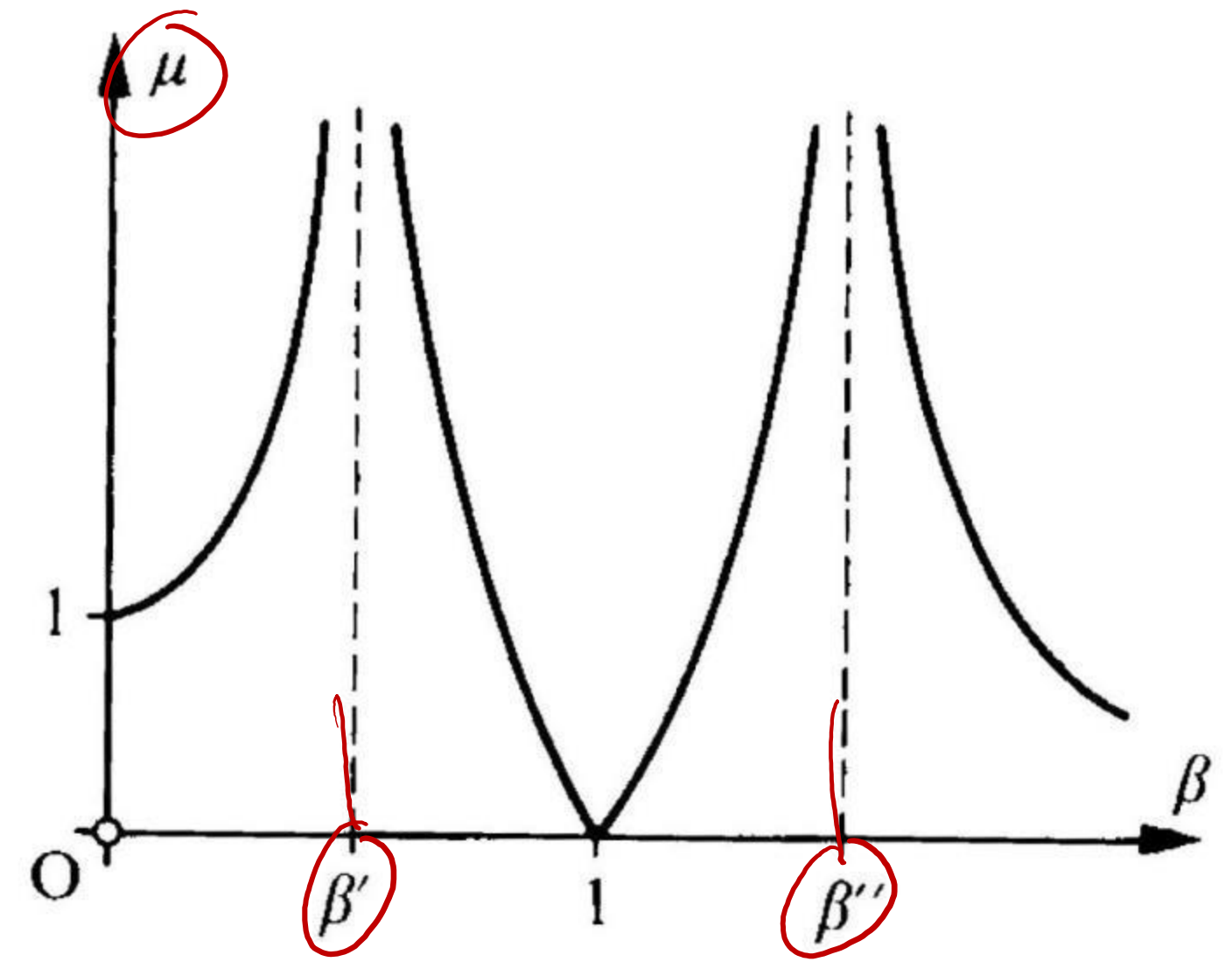
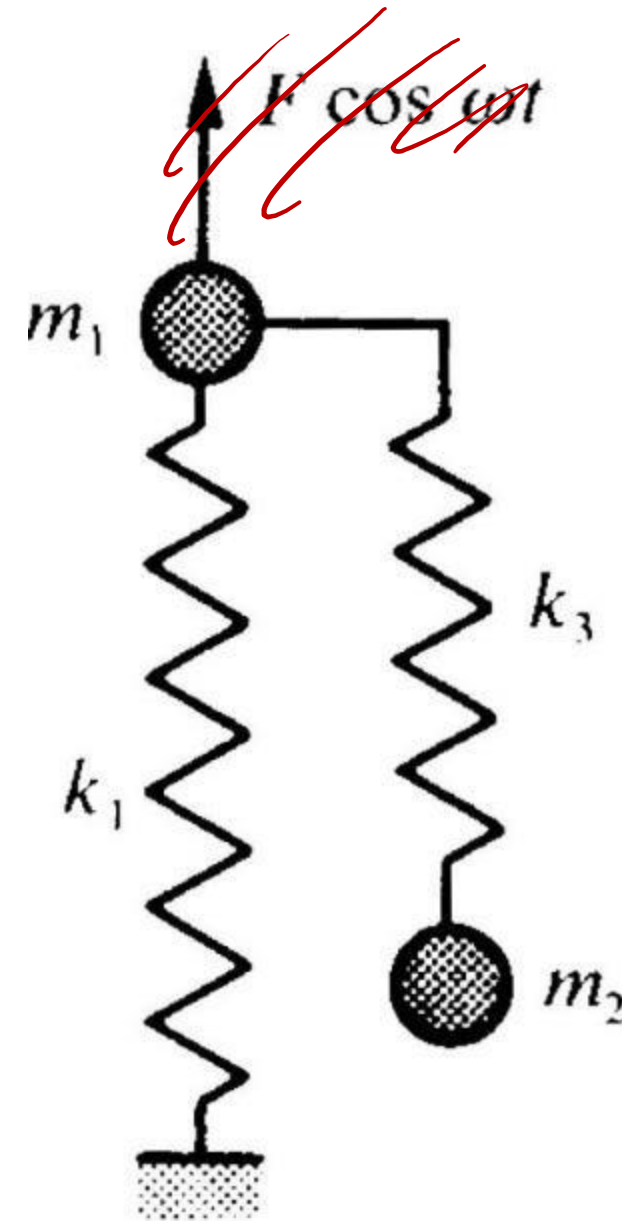
$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_3 (x_1 - x_2) = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_3 (x_2 - x_1) = 0$$

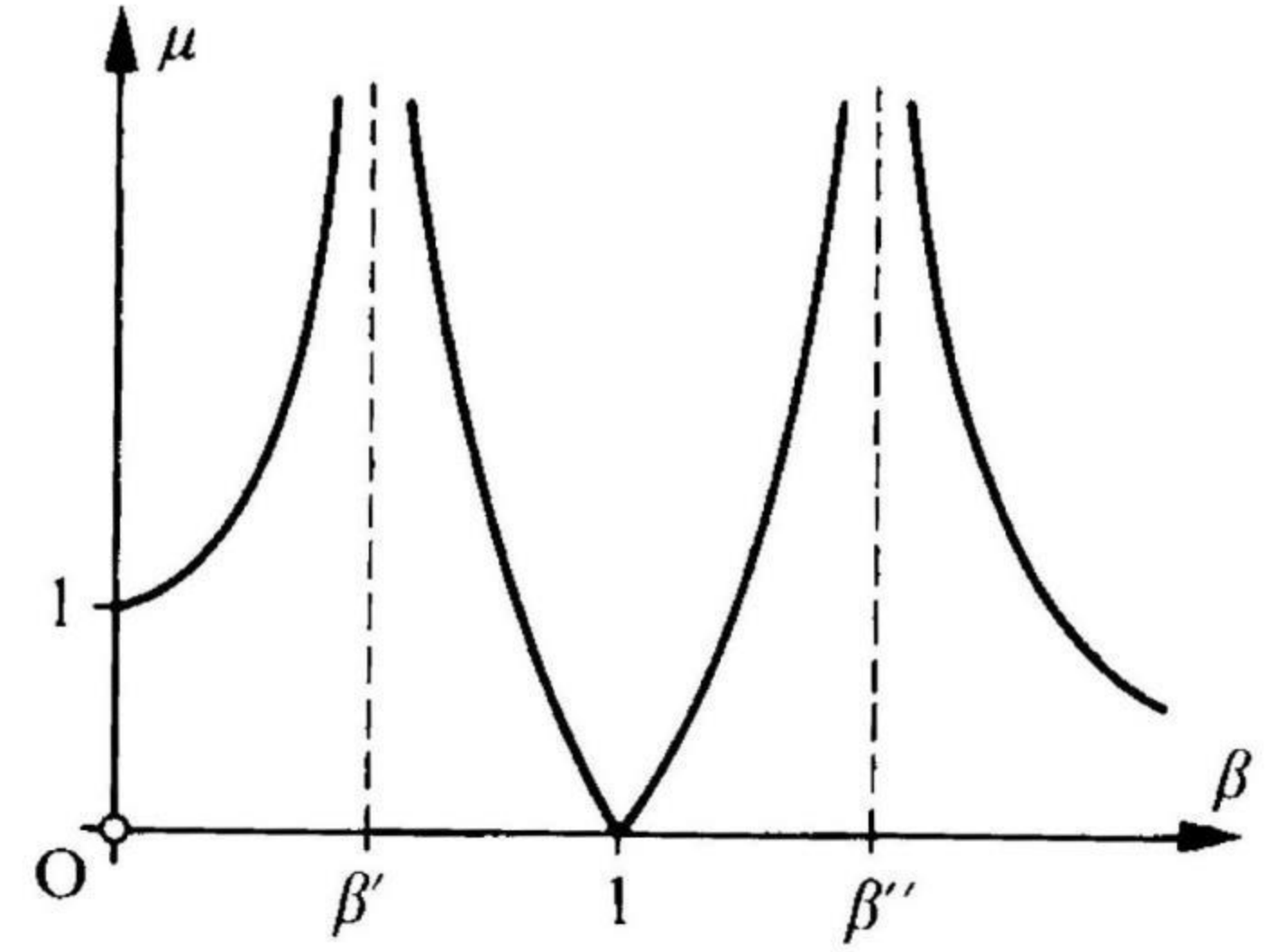
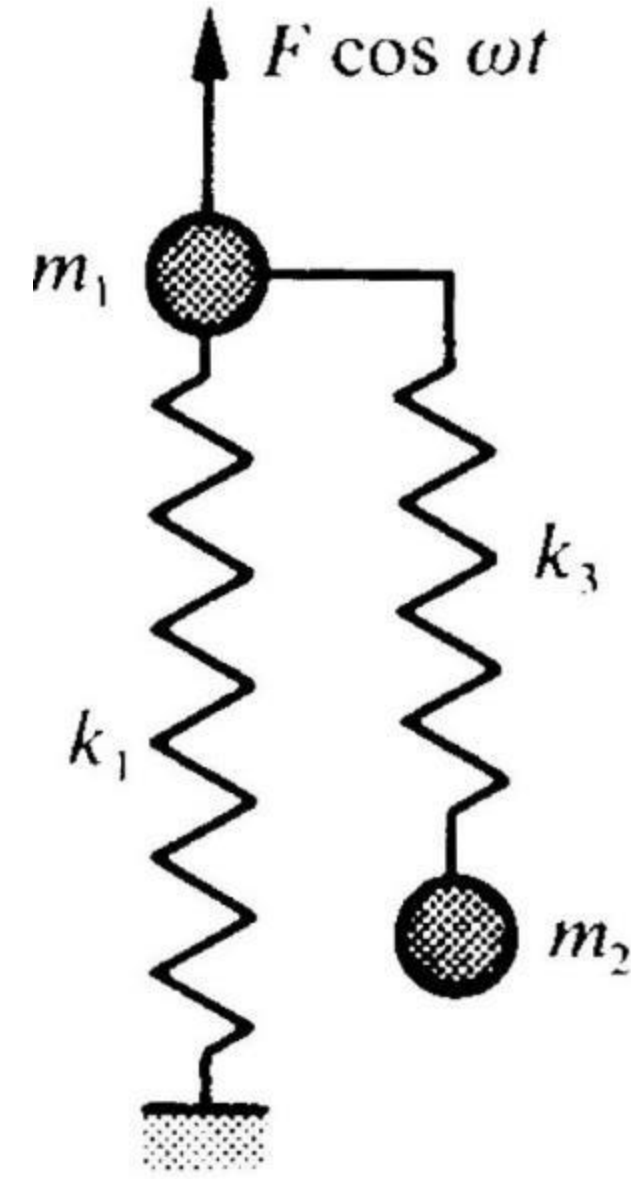
$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} -m_1 \omega^2 + k_1 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & -m_2 \omega^2 + k_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \alpha^2 \varepsilon - \beta^2 & -\alpha^2 \varepsilon \\ -\alpha^2 \varepsilon & (\alpha^2 - \beta^2) \varepsilon \end{pmatrix} = 0 \rightarrow (\beta^2 - 1)(\beta^2 - \alpha^2) - \varepsilon \alpha^2 \beta^2 = 0$$



EPFL Cas limite 1 – Conservatif



EPFL Amortisseur de Frahm – Cas limite 1 – Conservatif

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_3 (x_1 - x_2) = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_3 (x_2 - x_1) = 0$$

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & +k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

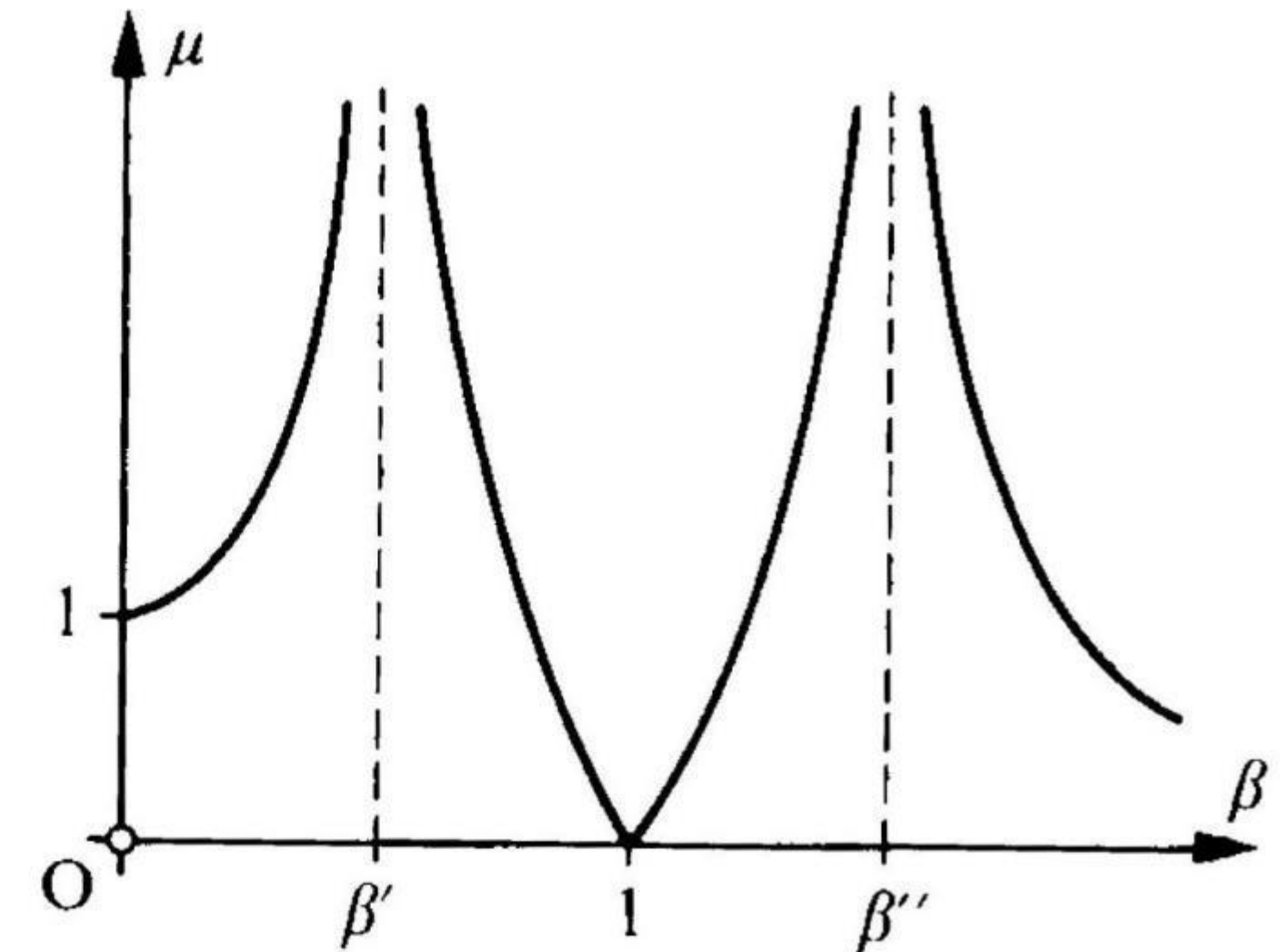
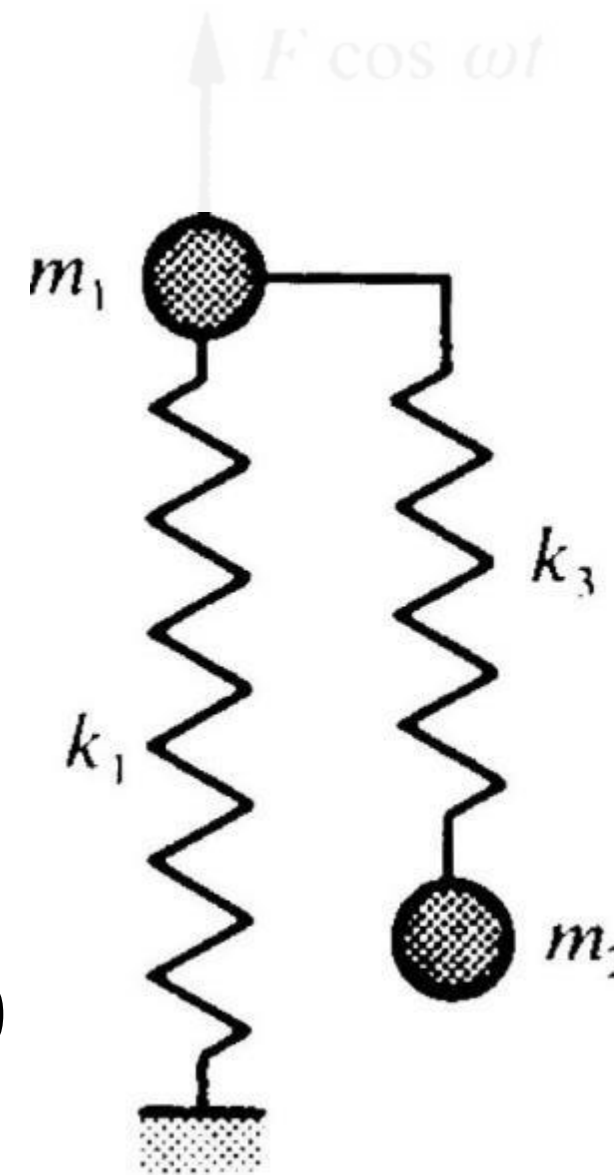
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{j\omega t}$$

$$\left(-\omega^2 \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & +k_3 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \det \left(-\omega^2 \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & +k_3 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\rightarrow \det \left(-\omega^2 m_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 + k_3/k_1 & -k_3/k_1 \\ -k_3/k_1 & +k_3/k_1 \end{pmatrix} \right) = \det \left(-\beta^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 + \alpha^2 \varepsilon & -\alpha^2 \varepsilon \\ -\alpha^2 \varepsilon & \alpha^2 \varepsilon \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 + \alpha^2 \varepsilon - \beta^2 & -\alpha^2 \varepsilon \\ -\alpha^2 \varepsilon & (\alpha^2 - \beta^2) \varepsilon \end{pmatrix} = 0 \rightarrow (1 + \alpha^2 \varepsilon - \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2) - \alpha^4 \varepsilon = (\beta^2 - 1)(\beta^2 - \alpha^2) - \varepsilon \alpha^2 \beta^2 = 0$$



EPFL Cas limite 2 - Dissipation infinie

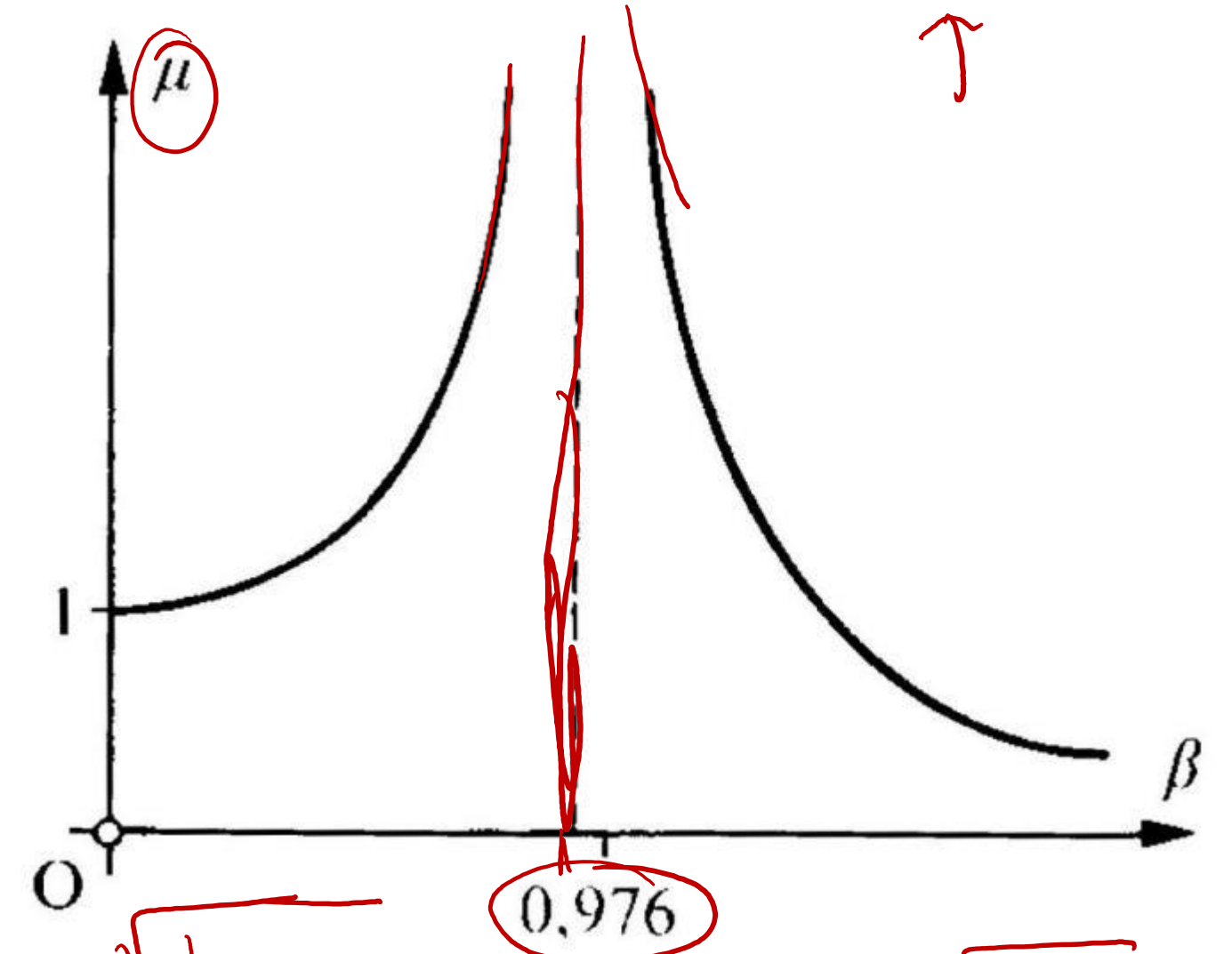
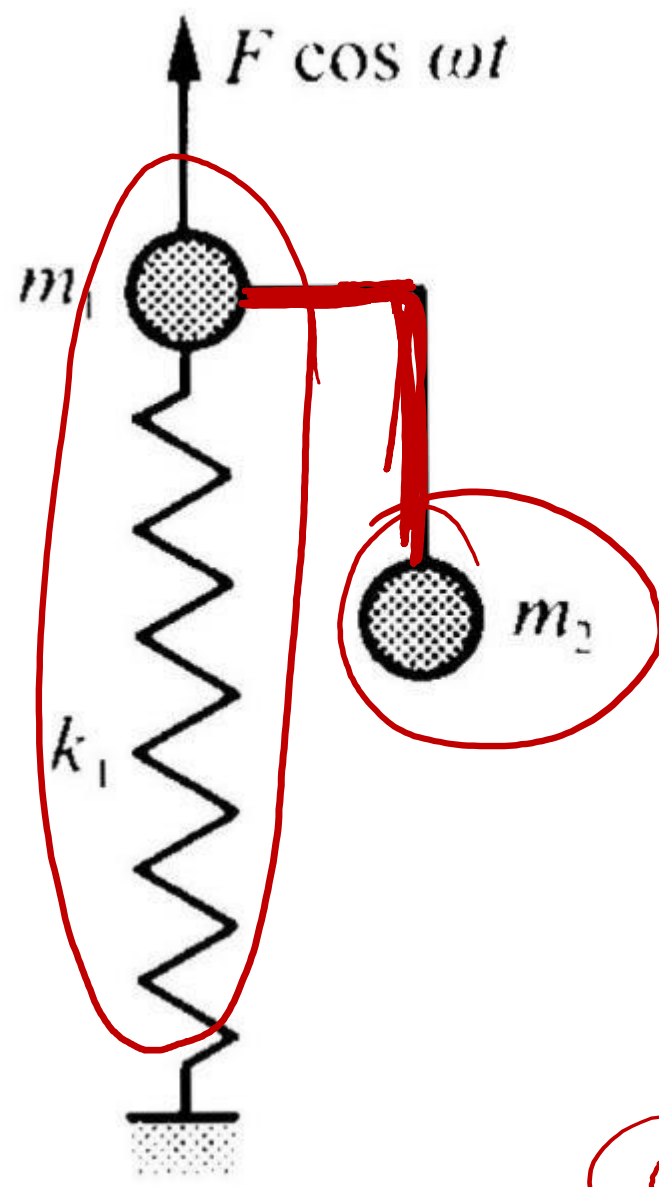
$$\mu = \frac{1}{\beta^2(1 + \varepsilon) - 1}$$

$$\beta^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon}$$

Cas limite de l'oscillateur secondaire à *résistance infinie* ($\eta \rightarrow \infty$, $\alpha = 1$, $\varepsilon = 0,05$)

$$\mu = \frac{1}{|\beta^2(1 + 0,05) - 1|} \quad (9.8)$$

$$\mu \rightarrow \infty \quad \text{si } \beta = 1/\sqrt{1,05} = 0,976$$



$$\frac{F_v}{N} = \frac{c}{k} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$\boxed{\dot{x}_1 = \dot{x}_2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1 + m_2}} \longleftrightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$$

$$\omega_0 < \omega_1$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \varepsilon}}$$

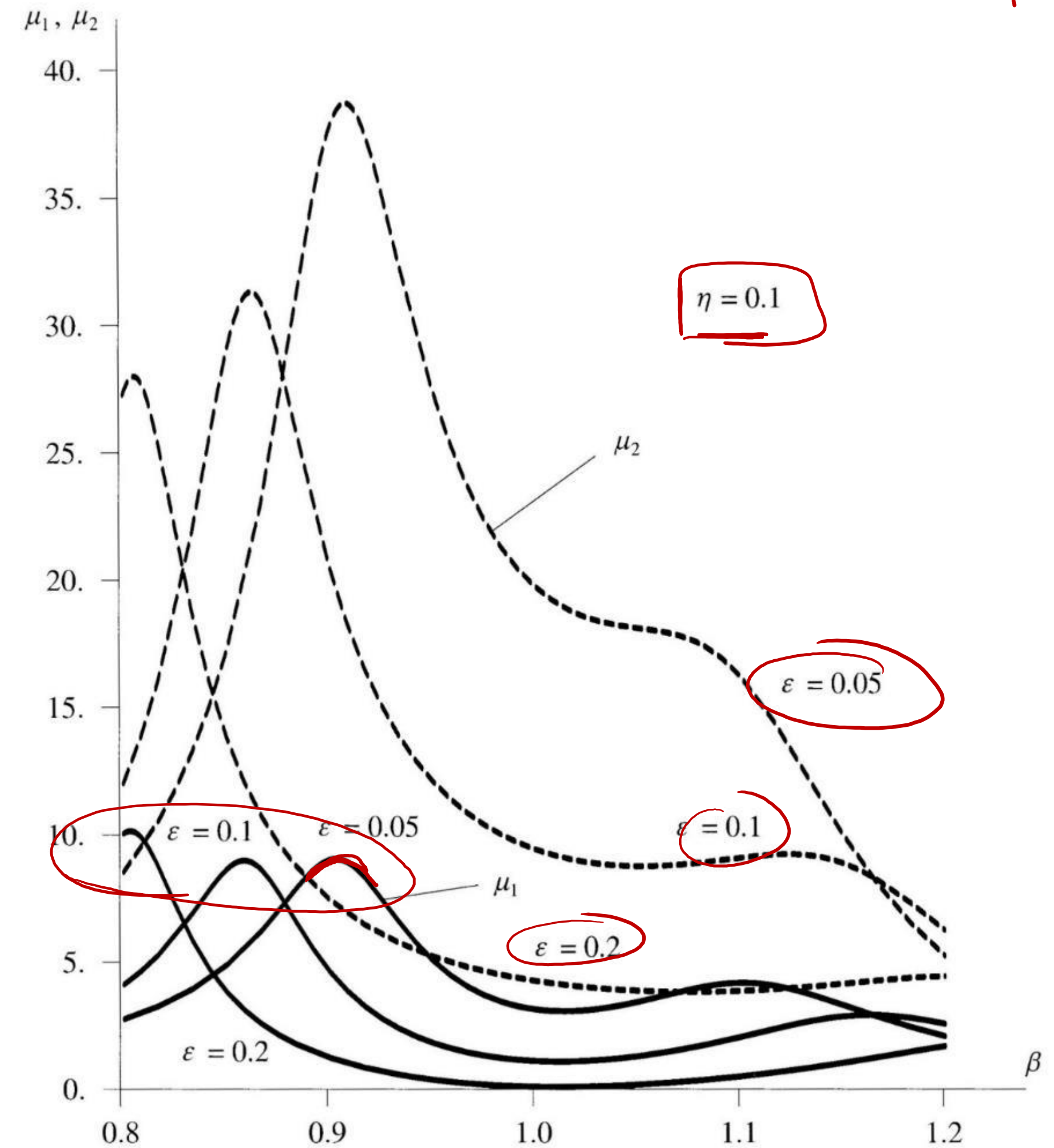
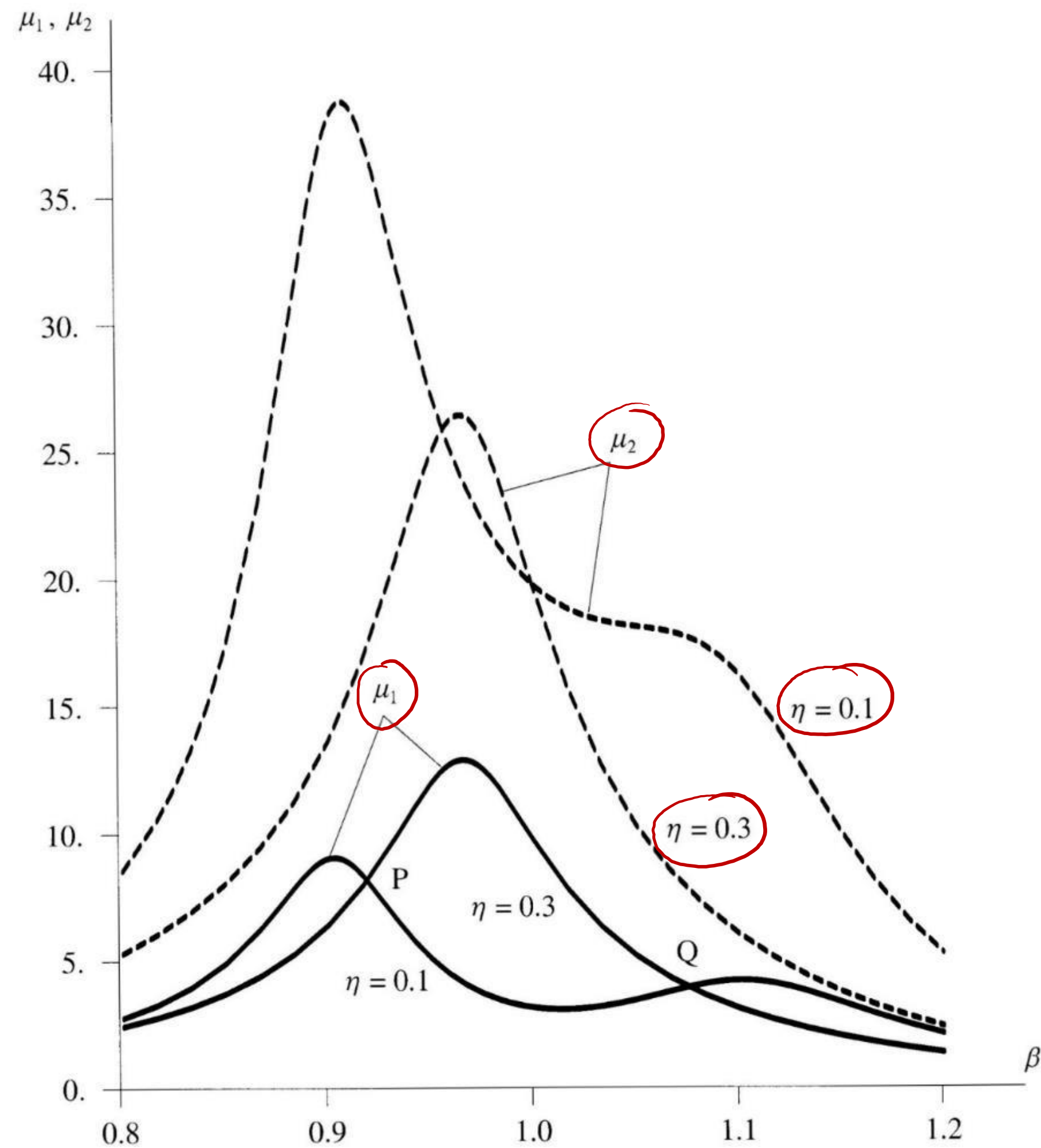
EPFL Mouvement des deux masses

Amplitudes relatives μ_1 et μ_2 du mouvement de la masse principale et de la masse secondaire

$$\mu_1^2 = \frac{X_1^2}{X_{1s}^2} = \frac{4\eta^2\beta^2 + (\beta^2 - \alpha^2)^2}{4\eta^2\beta^2(\beta^2(1 + \varepsilon) - 1)^2 + (\varepsilon\alpha^2\beta^2 - (\beta^2 - 1)(\beta^2 - \alpha^2))^2}$$
$$\mu_2^2 = \frac{X_2^2}{X_{1s}^2} = \frac{4\eta^2\beta^2 + \alpha^4}{4\eta^2\beta^2(\beta^2(1 + \varepsilon) - 1)^2 + (\varepsilon\alpha^2\beta^2 - (\beta^2 - 1)(\beta^2 - \alpha^2))^2} \quad (9.6)$$

EPFL Mouvement des deux masses

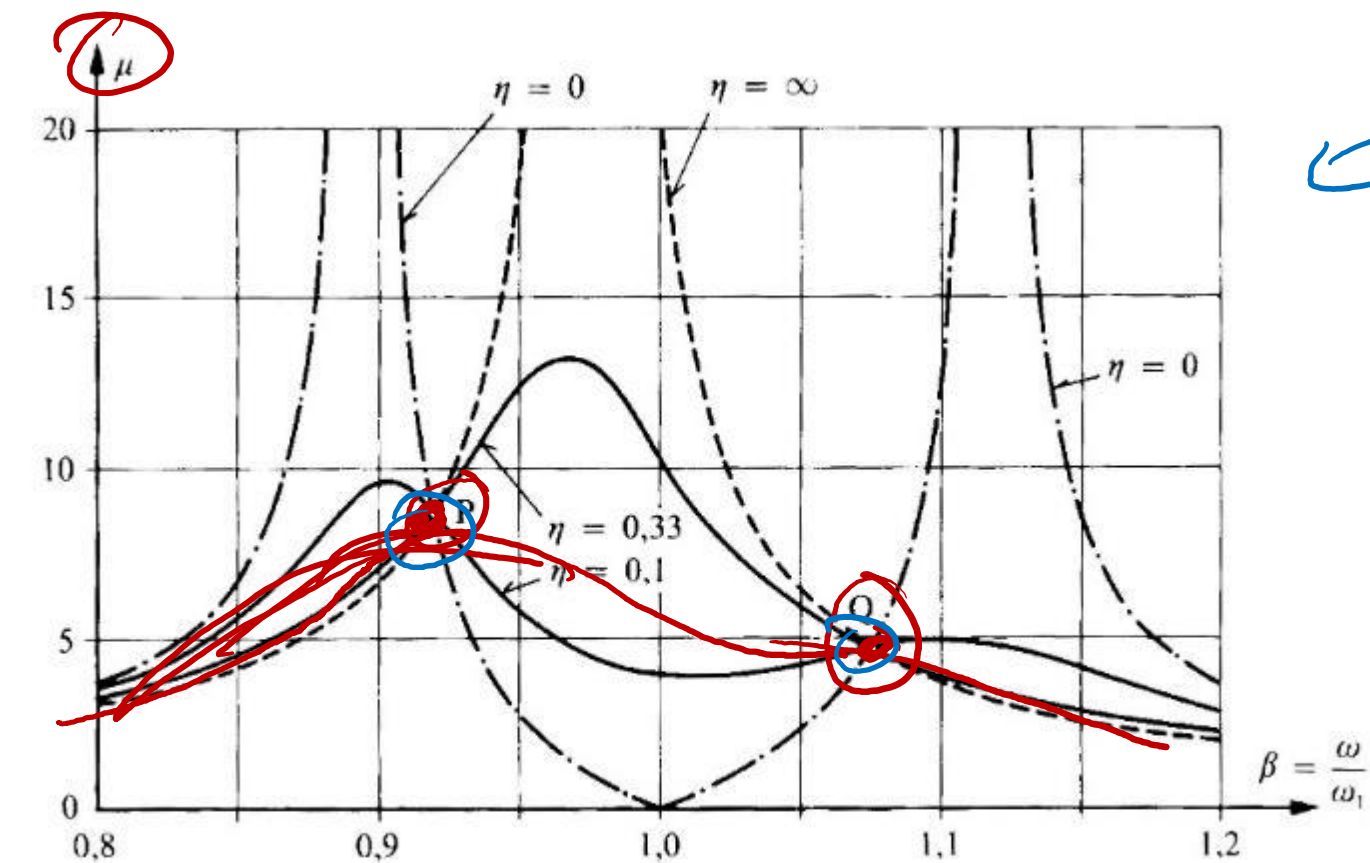
$$\varepsilon = \frac{m_2}{m_1}$$



EPFL Amortisseur de Frahm – Optimisation

Oscillateur de Frahm *optimal*

- limitation du mouvement de la masse principale m_1 sur une large plage fréquentielle
- choix de la courbe $\mu(\beta)$ passant par les deux points P et Q (indépendants de η) et avec une tangente horizontale en l'un d'eux

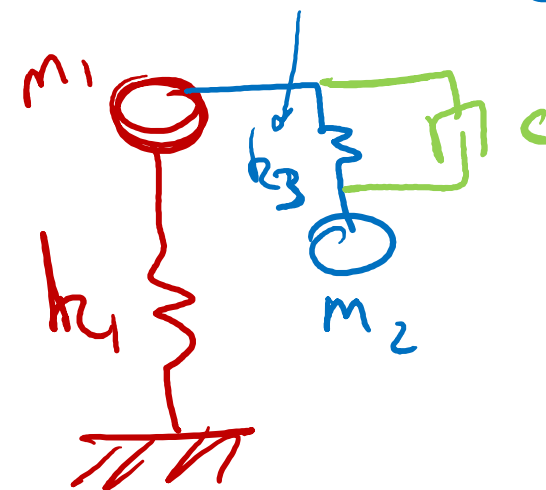


$\alpha = 1 \quad \varepsilon = 0,05 \quad \eta = 0; 0,1; 0,3; \infty$

Condition pour un amortisseur de Frahm optimal
(P et Q à même hauteur μ)

$$\alpha = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1}{1 + \varepsilon} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad (9.13)$$

$\rightarrow k_3, m_2 \Rightarrow P \text{ et } Q \text{ même hauteur}$
 $\rightarrow c \rightarrow \mu; \text{ pente nulle à } P \text{ ou à } Q$



Position des points P et Q optimaux et valeur du facteur d'amplification dynamique μ correspondant

$$\beta^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon} \left(1 \pm \sqrt{\frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon}} \right)$$

$$\mu = \sqrt{\frac{2 + \varepsilon}{\varepsilon}} \quad (9.14)$$

EPFL Amortisseur de Frahm – Optimisation

Rapport des pulsations α pour un amortisseur de Frahm à rapport des masses $\varepsilon = 1/4$

$$\alpha = \frac{1}{1 + 1/4} = \frac{4}{5} = 0,8$$

Position des points P et Q correspondants

$$\beta^2 = \frac{1}{1 + 0,25} \left(1 \pm \sqrt{\frac{0,25}{2 + 0,25}} \right)$$

$$\beta_1 = 0,730 \quad \beta_2 = 1,033$$

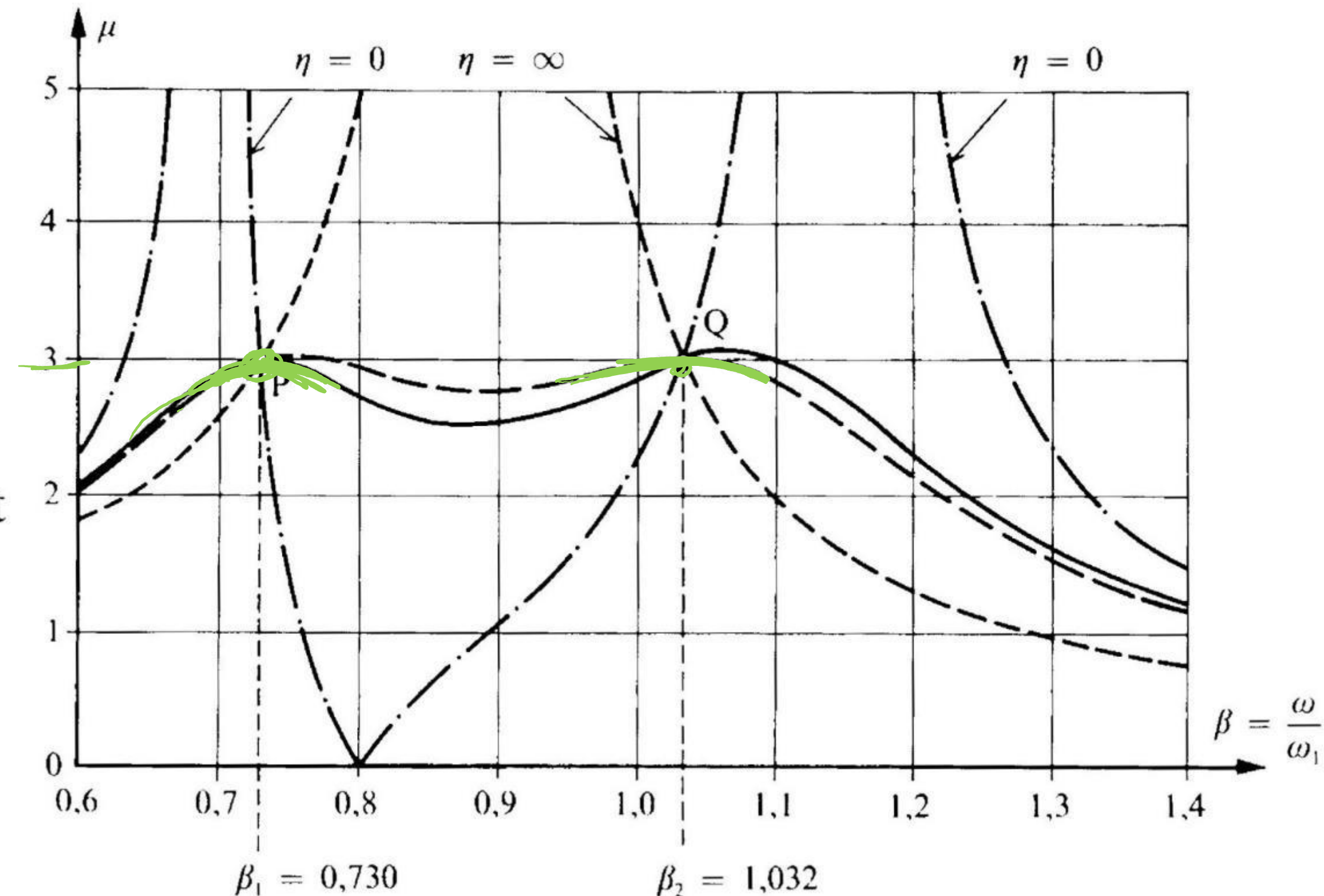
Facteur d'amplification dynamique μ correspondant

$$\mu = \sqrt{\frac{2 + 0,25}{0,25}} = 3$$

Amortissement relatif croisé η correspondant

$\eta = 0,207$ pour une tangente horizontale en P

$\eta = 0,231$ pour une tangente horizontale en Q



EPFL Amortisseur de Frahm – Optimisation

Rapport des pulsations α pour un amortisseur de Frahm à rapport des masses $\varepsilon = 1/4$

$$\alpha = \frac{1}{1 + 1/4} = \frac{4}{5} = 0,8$$

Position des points P et Q correspondants

$$\beta^2 = \frac{1}{1 + 0,25} \left(1 \pm \sqrt{\frac{0,25}{2 + 0,25}} \right)$$

$$\beta_1 = 0,730 \quad \beta_2 = 1,033$$

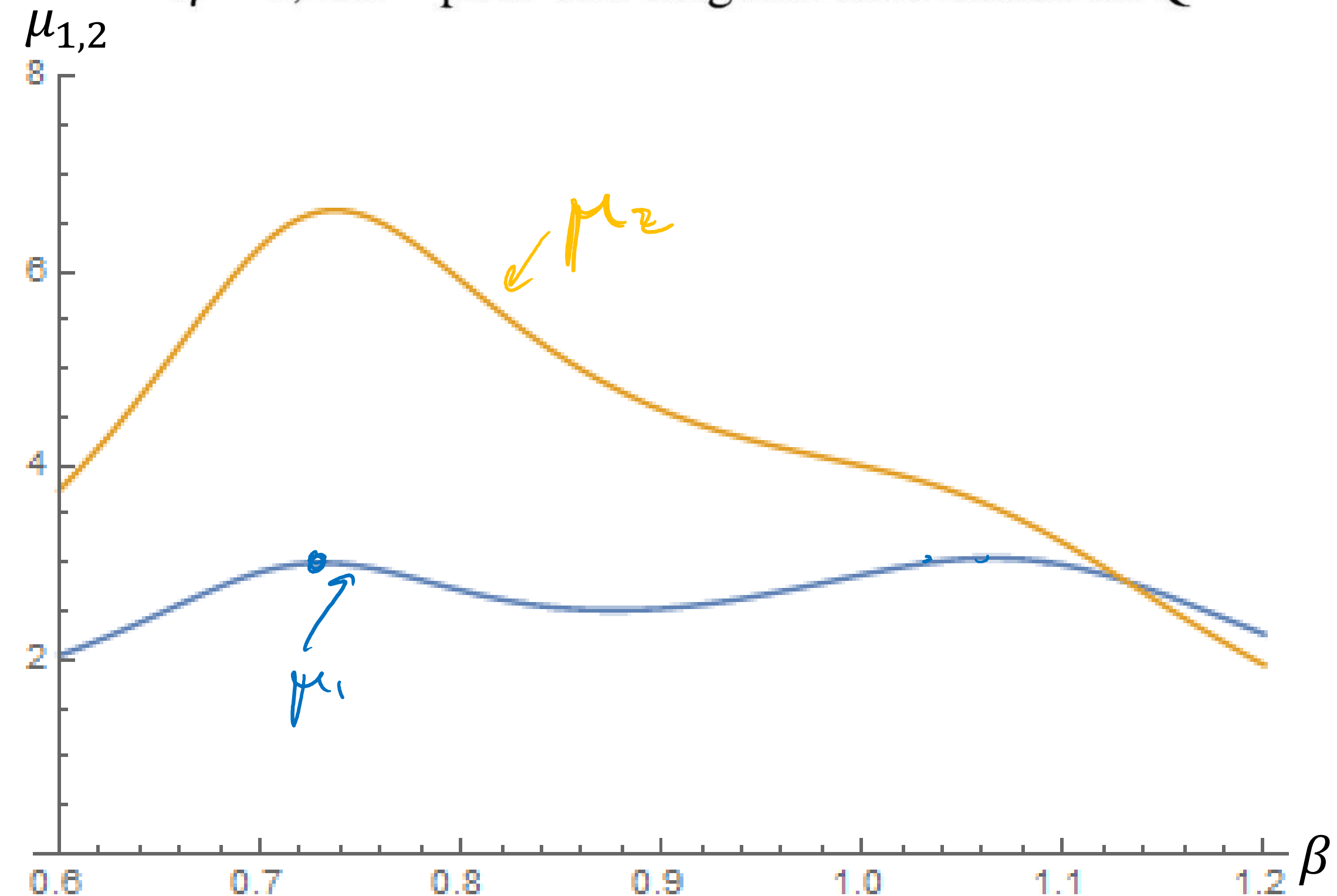
Facteur d'amplification dynamique μ correspondant

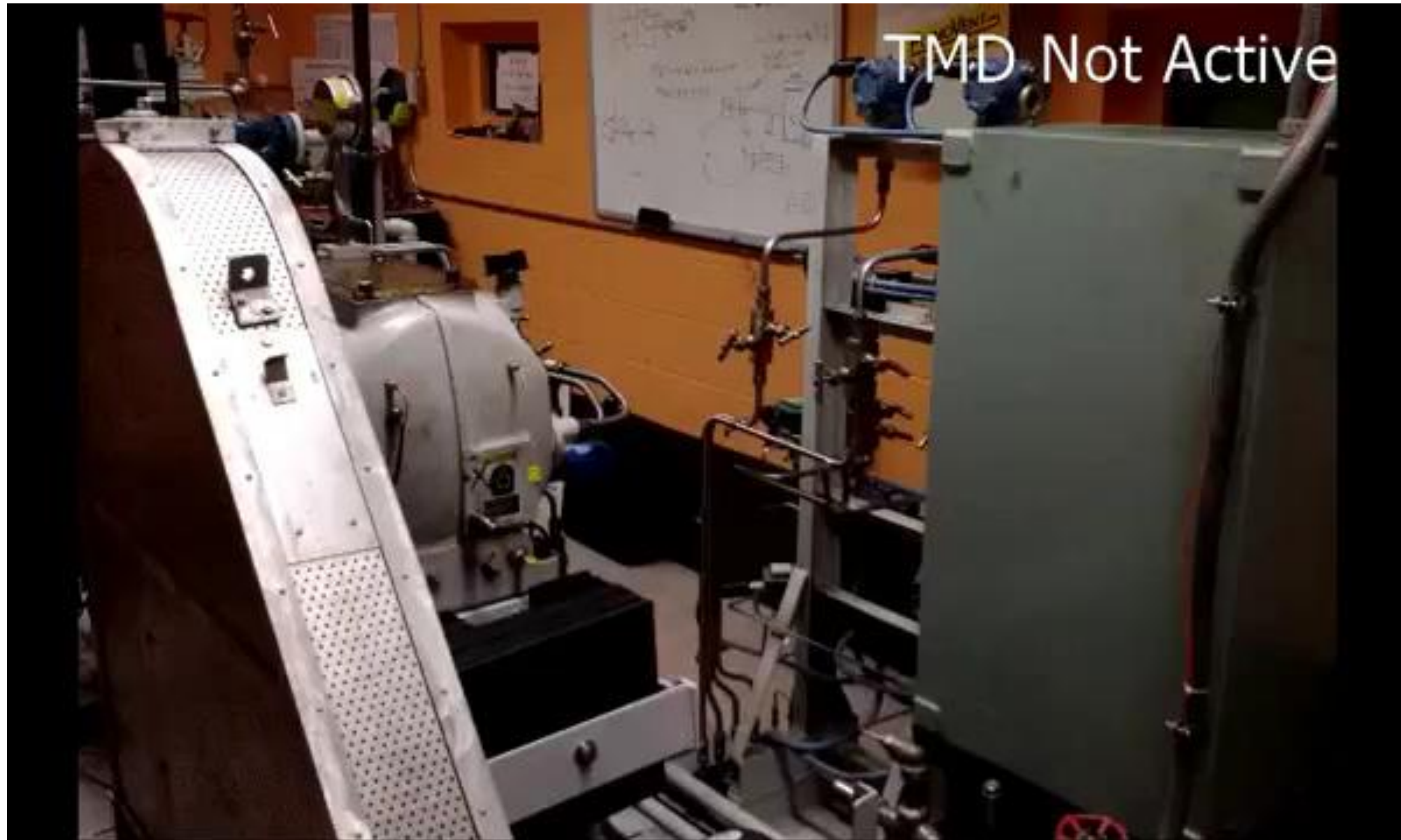
$$\mu = \sqrt{\frac{2 + 0,25}{0,25}} = 3$$

Amortissement relatif croisé η correspondant

$\eta = 0,207$ pour une tangente horizontale en P

$\eta = 0,231$ pour une tangente horizontale en Q





EPFL Example - Video

<https://www.youtube.com/watch?v=GzMuF-LMGaM>

